Eduardo Caianiello
***La science et la voix de l'événement. A la Recherche du sens,* Paris : Harmattan 2010**

***La Foi dans la Raison : le 0 du vecteur de la Connaissance* [APP. II pp. 286-292]**

Ces confessions de Socrate – le « chant du cygne » d'Apollon [*Phéd.*85a] – expriment *le contraire exact* de ce « platonisme » que maints épistémologues et savants de notre âge considèrent à peu près comme une insulte, en entendant avec ce mot non seulement la Foi dans l'essence mathématisable (= connaissable) de la Nature, mais la transmutation paralogique des opérations mathématiques ordinaires en un monde de substances séparées, statiques et figées. Remettons donc les choses en ordre, en redonnant de la sorte à la Foi sa place légitime dans la topique de la Connaissance.

La Foi est placée par Platon, en couple avec l'Imagination, au début de sa célèbre « ligne de la connaissance » en ce qu'elle est le fondement à la base de toute évolution scientifique ultérieure. Ce positionnement de la πίστις exprime la nécessité logique que tout mouvement de saisie perceptive (αΐσθησις) de la réalité qui *de fait* arrive à se transformer en une connaissance (ἐπιστήμη) ait dès le début démarré *en se dirigeant vers* la vérité *en général*, essentiellement conçue et vécue comme ce-qui-n'est-pas-qu'apparence (cf. la citation de Wittgenstein au début de cet Appendice II)

En regardant à la ligne de Platon comme à un *vecteur de connaissance* [Fig.46, et cf. la note 82 pour le texte en entier] nous dirons donc que la Foi [πίστις] est ce *vecteur nul* (module de la connaissance = 0, orienté vers la vérité, direction/vers « à déterminer ») qui *doit pouvoir* exister comme l'instant initial de tout mouvement de connaissance dont il nous est donné de suivre le déploiement effectif dans l'espace sensible/rationnel de la science[i] :

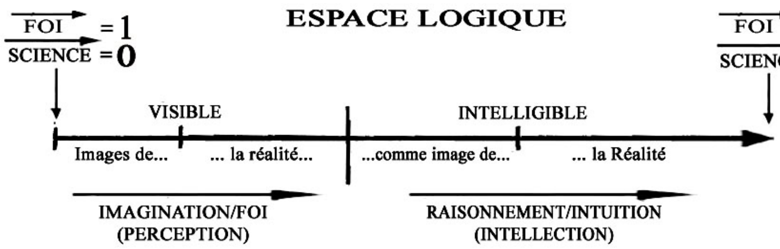

Figure 46

Or, ce que Socrate nous raconte dans le *Phédon*, n'est pas qu'en se dirigeant vers la « merveilleuse expérience » de la connaissance du monde naturel il a rencontré sa structure mathématique. Il nous offre au contraire le récit à la première personne de cette expérience de réveil que dans la *République* il fait vivre à notre âme éblouie par le Grand Mystère de nos doigts [cf. ci-dessus §1.2.2]. Dans son chant du cygne, c'est en effet l'âme de Socrate mourant qui nous raconte en direct son histoire : lorsqu'elle s'est dirigée sur les vérités mathématiques les plus élémentaires et évidentes, elle a été confrontée au phénomène inattendu d'un aveuglement complet.

La mathématique, nous dit Socrate, nous impose l'évidence incontournable que le *fractionnement* d'1 objet ($1\div2$) et sa *multiplication* (1×2) n'obtiennent pas deux résultats opposés, mais… le même résultat = 2 objets ! Ensorcelée par ce fait qui tout en étant là devant ses yeux depuis le début, s'est néanmoins manifesté d'un coup comme totalement inattendu, cette âme s'est enfin « arrêtée dans l'embarras », et cet arrêt soudain a engendré dans sa conscience la première apparition *positive* d'un pur et simple *phénomène mathématique*, ou de la pure et simple présence des mathématiques *en leur phénomène*. Pourquoi donc la Foi ? Puisqu'en ce moment – le moment où la plus évidente et banale des évidences transmute en une éblouissante énigme – … soit cette âme garde la pure et simple Foi dans une vérité mathématique qui vient pourtant de nous cacher intégralement son *sens*, soit : a) elle laisse tout tomber ; b) elle refoule et normalise le phénomène en inventant le mot « convention ». Ce mot, pourtant, n'est qu'un mot, le *pire* des mots, car il nous a ainsi évité de *ressentir* la vie intime de la Connaissance, et sa loi dynamique la plus lumineuse et vraie. « Convention » signifie maintenant que dans un monde où Nord et Sud c'est la même chose, l'unique route qui nous reste à suivre est la plus opportune : la route du Polytechnique, tout près de l'Académie de Paris. Regardons cela plus de près, en suivant le parcours scolaire de notre petit Socrate.

Avant d'avoir appris à lire, le petit Socrate ne savait pas que $2\times0=0$. Lorsqu'il a appris à lire, par contre, et qu'il a appris les additions et les multiplications, il a saisi cette expression comme une évidence mathématique : il en est maintenant aussi certain qu'il est certain que $2+2=2\times2=2^2= 4$. Le jour vient par contre, où il se confronte à l'expression $2^0=1$, et cette expression le fait reculer dans l'étonnement. Or, ce jour arrive *nécessairement*.

C'est en effet déjà incroyable et étonnant que dans la conscience d'un homme se présentent des choses comme 1, 2, 3… – *troisième* section de la Ligne (διάνοια) – qui frappent nos sens aussi immédiatement et naturellement, une fois que nous avons appris à lire, que celles qui habitent la *deuxième* section de cette même ligne : la dimension de la « réalité perçue », à laquelle appartient le tableau noir où ces mêmes symboles évidents font leur apparition irréversiblement perceptive. Toutefois, justement à cause de cette irréversibilité, notre perception (et nous avec elle) ne se rend pas compte de la magie qu'elle vient de réaliser. De même nous ne savons pas revenir au *son* « maman » tel qu'il était avant de devenir un mot, de même les symboles a, b, c … 1, 2, 3… que nous saisissons sur le tableau ne conservent *aucune mémoire* de la période qui a précédé leur transformation irréversible en des lettres et des nombres :

il nous est impossible de ne pas les *lire*, dès que nous les *percevons*. Pour cette raison, le petit ne s'étonne pas d'une suite d'objets perçus comme 2×2 = 4, même si en elle-même elle est déjà *très* étonnante, étant donné son aspect sensoriel et ses propriétés modales : en fait, *rien* qui appartienne à la deuxième section des tableaux noirs, des arbres et des ruisseaux ne peut parler avec une telle certitude catégorique de sa Nécessité ni, encore moins, appeler en présence avec autant de distinction directement *perceptive*, l'Impossible 2×2 = 5, qui pourtant n'existe pas, ni ne pourra jamais exister.

Lorsque, par contre, du cœur de cette même évidence surgit un jour la séquence banale $2^0 \to 2^1 \to 2^2$, ce Miracle est le véhicule immédiat – ici et maintenant, sous nos yeux – de sa mémoire interne. Pendant longtemps – un temps dont à ce stade nous *gardons* la mémoire – 2^2 a été *expliqué* avec 2+2, tandis que maintenant – nous raconte notre Socrate de Troisième – … tout devient Ténèbres (ὥσπερ ἐν σκότει). À la différence du stade précédent (le passage ne pas savoir *lire* 1, 2, 3 → *percevoir* 1, 2, 3) nous restons présents et en état d'éveil lorsque les échelons III, IV, V… de la suite en Fig.47, s'enrichissent des échelons *absolument aveuglants* I et II. En même temps nous comprenons *parfaitement* (III, IV, V…) et nous ne comprenons *absolument rien* (I, II).

I	II	III	IV	V	VI	→
2^0	2^1	$2^2=4$	$2^3=8$	$2^4=16$	$2^5=32$	....
•••	•••	•••••••••	•••••••••	••••••••••	••••••••••••	•••••••

Figure 47

En un mot : lors du passage …V, IV, III→II, I, nous *tous* tournons à vide, et le Sens fait naufrage, car l'aiguille de cette flèche vectorielle nous dit le Sud et le Nord en même temps, *dès* qu'elle nous dit quelque chose. C'est en ce moment qu'en se dressant à côté du Non Sens, le vieux Anaxagore nous tend la main, en nous dévoilant, grande ouverte, la porte opportuniste de la Convention, prête à se transformer aussitôt en mouvement « spontané » de notre âme brutalisée :

> « DEFINITION. - On appelle puissance d'un nombre relatif le produit de plusieurs facteurs, tous égaux à ce nombre : $a^n = a \cdot a \cdot a \ ...\cdot a$ (*n* fois) [...]. Sur la base de cette définition de puissance, l'écriture a^1 serait *dépourvue de sens* ; on pose alors par convention que cette base est égale à *a*, à savoir $a^1 = a$ – […] Supposons maintenant a^0, et considérons l'identité $a^n{:}a^n = 1$ (le quotient d'un nombre divisé par lui même est égal à l'unité); si dans l'égalité qui exprime la propriété citée nous posons $m=n$, nous obtenons $a^n{:}a^n = a^{n-n} = a^0$, qui est un écriture formellement dépourvue de sens. Puisque nous avons constaté que $a^n{:}a^n = 1$, il est *spontané de poser la convention* $a^0 = 1$. » [Chiellini 1980: 85-88. Ma trad. L'italique est de moi.]

Une deuxième porte est toutefois toujours grande ouverte, à côté de cette humiliation : c'est la porte méditative de la Connaissance. Maître Socrate est là, toujours prêt à nous la dévoiler, si seulement nous restons même un seul instant à l'écoute, car ce moment d'éblouissement et de vide de sens est *structurel*, en ce qu'il s'enracine dans la nature même des mathématiques (à savoir de l'esprit humain) en se présentant donc *à chaque passage* d'une dimension opératoire à l'autre.

3. D'étonnement en étonnement

Revenons en effet à la simple suite des nombres « *n* » 1, 2, 3… et mettons-nous du point de vue du petit qui vient de les apprendre. Dans cette suite [sur ce point, cf. §2.4.3.2B], 1 est l'unité, 2 est pair (définition de pair : « 2*n* ») tandis que 3 est impair (« 3≠2*n* ») : l'enfant *sait* maintenant que le nombre 3 n'est pas divisible par le nombre 2. Or le jour vient où il doit apprendre les fractions. Nous lui enseignons alors que 3÷2 peut s'écrire aussi 3/2, puisqu'en effet ce n'était pas *absolument* vrai que 3 n'est pas divisible par 2 : si nous écrivons cette division comme 3/2, et que nous considérons cette division comme son propre résultat – déclarons-nous avec satisfaction – ça s'appelle une « fraction » !… et dans cette « fraction » le 3 est divisé exactement par 2, ainsi qu'il se passe dans la division 3÷2=1,5. En ce faisant, nous apprenons donc à cette petite âme toute neuve que dans l'expression 3/2=*a*, *a* signifie un nombre qui est la moitié exacte de 3, à savoir que 3=2*a*. Mais voici cette âme s'appelle Socrate, et lève alors la main en observant que si *a* est un nombre, et que 3=2*a*, alors 3 *est pair*, car « pair » signifie = 2*n* ! Et cela est *extrêmement* étonnant ! Il faudra donc que nous lui « expliquions » que *a* est un nombre d'un autre genre, et que pour cette raison ce nombre s'appelle « rationnel ». Cette « explication » pourtant n'explique rien du tout, car il ne s'agit que du baptême/légitimation de l'expression *jusqu'ici impossible* « *2a=3* ». Une fausseté impossible (un nombre dont le double est impair) devient ainsi soudainement une vérité nécessaire.

Or cette *trans-modalisation* – ce passage de l'impossible au nécessaire – définit le fond dynamique constamment agissant de notre espace opératoire. Comme exemple, suivons en trois passages la trajectoire $\mathbf{G} \to \mathbb{N} \to \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ (grandeurs→nombres naturels→ rationnels/entiers→ réels), en le reprenant dès le début.

(1) $\mathbf{G} \to \mathbb{N}$ – Toute grandeur est continue et sans aucun doute [πίστει] divisible par deux. La simple apparition des nombres Pairs/Impairs dans notre univers mental oppose donc – dorénavant et à jamais – le Nombre à la Grandeur.

Ceci est le premier passage d'une nécessité – toute extension quantitative continue est nécessairement divisible par deux – à la nécessité contraire : l'extension quantitative continue 3 est nécessairement [πίστει] indivisible par 2.

(2) $\mathbb{N} \rightarrow \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$ – Du point de vue logique l'apprentissage commence avec les *nombres* 1, 2, 3… et non pas avec les nombres « entiers » 1, 2, 3…. À l'intérieur des nombres, nous définissons entre autres l'opération de multiplication/division. Sur cette base, nous disons que $3\times2=6$ et $3\div2=1$ *avec reste 1*, car 3 étant impair, 2 et 1 sont les deux parties, différentes entre elles, dont il se compose. L'opération de division est donc *parfaitement possible, efficace et définie* dans l'univers du Nombre, et tout le monde considère en effet une évidence immédiate que $3\div2$ donne comme reste 1. Tout simplement, dans ce nouvel univers le nombre impair 3 ne peut pas être divisé en *deux nombres* égaux.

Le jour vient pourtant où nous concevons la mission impossible de partager le nombre 3 en deux parties égales, que nous noterons a et b … Le petit Socrate/Stevin/Descartes… nous riposte ce que nous venons de voir : que cela est absurde, car dans ce cas nous aurons $2a=2b=3$; mais 3 étant impair, et donc $\neq 2n$, cette opération est *impossible*... donc a et b *ne sont pas des nombres* ! Nous répondrons alors que c'est vrai : 3 est sans doute un nombre impair, mais nous pouvons pénétrer à *l'intérieur* de son étendue entière et la partager en 2 étendues/parties a et b, que nous noterons comme 3/2 et 3/2, en ayant soin de nous rappeler que cette expression n'indique pas le rapport entre les deux étendues globales « n » 3 et 2, mais *irréductiblement* la subdivision interne de l'entier numérique 3 selon ses 2 parties – « *fractions* » – a et b. En ce faisant – grâce à cet « irréductiblement » qui institue une « définition causale » des nombres/entiers et des nombres/parties – nous aurons évité la contradiction d'un nombre impair qui est aussi pair en ce qu'il est le double de l'une de ses 2 moitiés. Cette deuxième coupure germinatrice (*Schnitt*, διαίρεσις …) dans le « continu d'un seul tenant » [cf. note 6] des grandeurs/nombres, a donc engendré deux nouvelles espèces d'entités – le nombre-en-tant-qu'entier $\mathbb{Z}$, et le nombre-en-tant-que-partie $\mathbb{Q}$ – à partir du *genus* « n », qui dorénavant aura acquis la qualification de nombre « naturel » $\mathbb{N}$.

Et voilà ! Cette même nécessité mathématique qui dans le passage précédent nous a forcés à admettre une « grandeur » (l'impair 3) non divisible par 2, est maintenant à son tour forcée par la nécessité contraire 3/2. Un monde mathématiquement impossible (le monde où un nombre impair est le double d'un autre nombre) s'est ainsi soudainement retransformé en une nouvelle dimension du mathématiquement évident.

(3) $\{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ – Cette même situation se produit lorsque dans ce nouvel univers de nombres ayant la forme n/m – où m et n ne sont jamais pairs ensemble, car n/m doit irréductiblement être un nombre/partie (une « fraction irréductible ») – … nous butons sur l'expression $n/m=\sqrt{2}$, qu'ainsi que $2^0=1$ nous ne pouvons pas éviter de prendre en charge. Si cette expression fait partie des phénomènes à sauver, alors nous devons reconnaître que $n^2/m^2=2$… mais alors $n^2=2m^2$, où *apparemment* m et n sont pairs ensemble[1], ainsi que dans $2a=3$, 3 était *apparemment* un nombre pair. Manifestement donc, $n^2=2\times m^2$ nous pose le même problème que $3=2\times a$… et ce problème est celui d'un manque *radical* de sens, au sein d'une expression qui provient par contre d'un univers absolument évident. Il faudra donc attendre, pour que ce nouveau vide se révèle comme la graine féconde d'un nouvel univers non seulement d'opérations (car comme nous l'avons vu les opérations viennent après), mais de *significations*.

En synthèse, il n'y a pas *un seul passage* dans la structure portante de la mathématique, qui ne soit organisé selon cette dynamique modale : une situation rigoureusement *impossible* devient un jour l'acte de naissance d'une nouvelle entité évidente. Inutile de rappeler qu'il a fallu attendre des millénaires pour que la grandeur $\sqrt{2}$ réalise l'exploit de se transformer en un nombre.

---

[i] Cet usage dynamique du mot πίστις comme point de départ (0) *de tout processus de connaissance* est très clair chez Aristote, et cela se montre encore une fois distinctement dans la transformation que cette expression peut subir chez les traducteurs. Lorsqu'il est question de l'Infini [ἄπειρον], dans le Livre III,4 de la *Physique*, Aristote commence par observer que malgré les grandes difficultés que présente une « théorie de l'Infini » [ἔχει δ'ἀπορία τοῦ ἀπείρου θεωρία, *Ibid.*203b30] le simple fait que quelque chose d'infini existe [τοῦ δ'εἶναί τι ἄπειρον = « qu'il y a quelque chose d'infini » *Ibid.* 203b15] est indéniablement attesté par cinq évidences : le temps ; la divisibilité de la grandeur mathématique traitée par les mathématiciens ; l'alternance de génération et corruption ; la nature relative de la limite [πέρας] en tant que telle ; le mouvement de la pensée par rapport au nombre et à l'espace mondain. [*Ibid.* 293b15-30]. Or la phrase d'introduction est celle que je viens de citer, où Aristote utilise le mot πίστις :

> « Τοῦ δ'εἶναί τι ἄπειρον ἡ πιστις ἐκ πέντε - Qu'il y a quelque chose d'infini [ou : que l'Infini est bien quelque chose] cela est attesté par cinq [ἐκ πέντε] faits [évidences, situations, états de choses…] – Ou aussi : La certitude [ἡ πιστις] que quelque chose d'infini existe, nous vient de cinq etc. » [*Ibid.* 293b15-30. Ma trad.]

Barthélemy Saint Hilaire traduit par contre : « Pour démontrer l'existence de l'infini, on peut recourir à cinq arguments principaux » [1862, I : 95]. Cette traduction pourtant n'est pas une erreur (ainsi que dans le cas de τί κινεῖται comme « une corps réel bouge » en §4.5.2] : c'est bien vrai que les cinq évidences dont il est question sont autant d'« arguments » pour une « démonstration », mais elles ne le sont que dans la mesure où nous les acceptons comme des *hypothéseis* ultimes (dans le sens que Platon donne à ce mot dans la note qui précède) étant donné l'ineffaçabilité absolue de leur présence dans notre appréhension du monde. Encore une fois : *sozeïn ta phaïnoména*.

---

[1] Démonstration. n^2 est pair car il est $2m^2$. Alors n est pair (car $\text{impair}^2=\text{impair}$). Cela signifie que $n=2n'$. Donc $n^2 = 2m^2 = (2n')^2 = 4n'^2$. Mais si $2m^2 = 4n'^2$, alors $m^2 = 2n'^2$, et dans ce cas m aussi est pair.