Eduardo Caianiello – *La genèse des mathèmatiques et la puissance dynamique du mental humain. Une démonstration d'existence*, Sarrebruck : EUE : 2010, pp. 172-176, 40-343

T (7C) « La célèbre expérience dont il est question [Galilée 1632 : 111-121] intervient au tout début du *Dialogue des Grands Systèmes* lorsque Sagredo n'arrive pas à accepter l'idée que tout mouvement, aussi rapide et soudain qu'il soit, « passe par tous les degrés précédents de lenteur, en nombre infini, qui se trouvent entre n'importe quel degré assigné de vitesse et l'état de repos » [ibid. : 110]. Pour le convaincre, Salviati doit avant tout *désarticuler* de l'intérieur les certitudes de son élève – intuitives et formant dans leur ensemble une unité globale purement intuitive et « syncrétique » – pour ensuite le « forcer » à les ressouder ensemble – Piaget dit « les multiplier » – à un niveau plus subtil et profond, c'est-à-dire à un niveau *purement* mathématique et projectif. Écoutons donc Salviati à l'œuvre.

(1) *Première image intuitive* – Le fait de l'accélération incessante d'un corps qui tombe à partir de la quiétude est accepté comme une évidence immédiate : « J'en suis absolument certain ».

> ⟨87⟩ « SALVIATI - Hésiteriez-vous à admettre que ce boulet, quand il descend, acquiert toujours davantage d'élan et de vitesse ? SAGREDO : J'en suis absolument certain. » [Galilée 1632 : 112.]

(2) *Deuxième image intuitive* – L'élan accumulé par une sphère oscillante à tout moment de sa descente est le porteur actuel de la puissance de la faire remonter à la même hauteur d'où elle est partie. Ce fait aussi est accepté « sans objection », grâce à une suite d'images absolument convaincantes :

> ⟨88⟩ « SALVIATI - Et si je vous disais que l'élan acquis en n'importe quel point du mouvement est suffisant pour reconduire le boulet à la hauteur d'où il est parti, le concéderiez-vous ? SAGREDO - Sans objection. […] C'est ce que montre l'expérience : si on prend un poids suspendu à une corde, qu'on l'écarte de la verticale qui est son état de repos, et qu'on le laisse aller librement, il descend vers la verticale et la dépasse d'une distance égale à celle qu'il a parcourue, ou d'un peu moins à proportion qu'il est empêché par l'air, la corde ou d'autres obstacles. De même l'eau, quand elle descend dans un siphon, remonte d'autant qu'elle était descendue. » [Ibid.]

(3) Un critère d'égalisation de la quantité de vitesse/élan est introduit, qui produit la synthèse logique (1)×(2) : deux corps qui tombent en chute accélérée à partir du repos, sont les porteurs actuels d'un même élan lorsqu'ils se trouvent à la même distance *verticale=h* du point de départ, en ce que l'élan qu'ils ont accumulé a la puissance de les faire remonter à la même hauteur d'où il sont partis : « Je le crois sans hésiter »…

> ⟨89⟩ « SALVIATI : Aurez-vous quelque difficulté à admettre que, si deux mobiles égaux, sans rencontrer d'obstacle, descendent le long de lignes différentes, ils acquièrent pourtant des élans égaux, du moment qu'ils se rapprochent également du centre ? SAGREDO : Je ne comprends pas bien la question. SALVIATI : Je vais m'expliquer mieux avec une figure [*ici Fig. 26*].

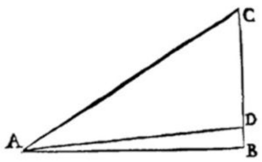

Figure 26 [Galilée 1632 : 118]

> AB sera cette ligne parallèle à l'horizon ; au-dessus de B j'élève la perpendiculaire BC, puis je joins CA en oblique. Supposons que CA soit un plan incliné tout à fait lisse et dur, le long duquel descend une bille parfaitement ronde, d'un matériau très dur, et qu'une pareille bille descende librement par la verticale CB, je vous demande si l'élan de la bille qui descend le long du plan CA, quand elle a rejoint le terme A, peut être égal à l'élan que l'autre bille a acquis au point B, après être descendue par la verticale CB. SAGREDO : Je le crois sans hésiter : toutes deux se sont rapprochées également du centre et, selon ce que je vous ai concédé, leurs élans suffiraient aussi à les ramener à la même hauteur. » [Ibid.]

Deux évidences conjointes s'affirment donc puissamment dès le début : a) l'*accélération naturelle* de la chute ; b) la *polarité interne* de cette même allure accélérative. Une seule image globale impose de la sorte [Fig. 28.I] : d'un côté, l'augmentation constante et uniforme du mouvement = rapidité avec laquelle il se hâte vers sa destination, de l'autre, celle du mouvement = élan qui l'anime de l'intérieur, et qui est toujours virtuellement compensé par un élan opposé. C'est donc sur la base de l'évidence solide d'un corps qui tombe-et-rebondit, un pendule qui oscille ou de l'eau qui descend dans un siphon pour immédiatement remonter de l'autre coté… que Sagredo admet finalement que, sans faille (« Je le crois sans hésiter ») un même *élan* – donc un même *mouvement* – sera présent tant dans le corps qui tombe par la verticale CB que par celui qui glisse sur *n'importe quel* hypoténuse CA . Autrement dit : une même intensité de rapidité/élan *se conserve* au travers de n'importe quelle transformation apparente dans la trajectoire parcourue.

Salviati s'occupera maintenant de faire bouger cette même certitude qu'il vient d'engendrer dans ses amis, ainsi que Piaget fait avec ses petits. Résumons tout le parcours en trois passages.

I. A la suite de la ⟨89⟩, la certitude de Sagredo [(1)×(2)] est enracinée dans la clarté d'une double image parfaitement claire (mais pas tout à fait distincte !): la progressive augmentation de la *rapidité* des chutes CB, CA, CA_I, C_IA_I [Fig. 28.I] coïncide avec la progressive accumulation d'un *élan* en sens inverse.

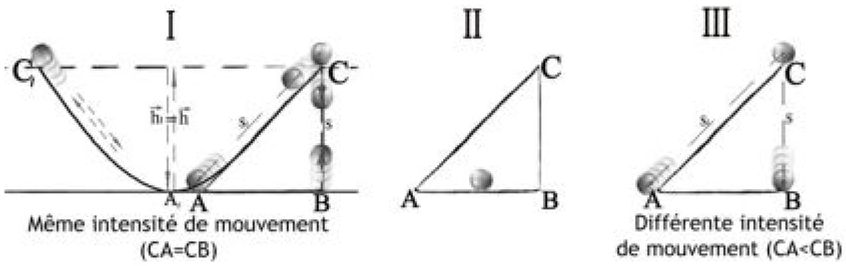

Figure 28

La maïeutique de Salviati conduit ses interlocuteurs dans la dimension purement projective du phénomène de la chute accélérée, en suivant un rythme ternaire (I-II-III) qui lui permet de tracer une « coupure » à l'intérieur de la notion tout à fait claire et évidente de « vitesse », qui en résulte ainsi subdivisée en une « vitesse-élan » et une « vitesse-rapidité ».

II. Salviati enchaîne maintenant *une autre* image – cette fois-ci de parfaite immobilité [Fig. 28.II] – douée du même degré d'évidence que celle qui la précède :

> ⟨90⟩ « SALVIATI : Et que ferait la même bille, posée sur le plan horizontal AB ? SAGREDO : Elle resterait immobile, puisque ce plan n'a aucune inclinaison. » [Ibid.]

III. Et nous voilà enfin au troisième moment : le « prestige », le moment de l'étonnement qui passe par l'évidence d'une troisième image [Fig. 28.III] : la bille qui en A est animée par le même *élan* qu'en B, descend pourtant plus *lentement* sur CA que sur CB, où « CA » signifie *le* plan incliné en sa généralité : à savoir toute surface formant avec BA un angle α>0°

> ⟨91⟩ « SALVIATI : Mais sur le plan incliné CA, elle descendrait, *plus lentement cependant* que par la verticale CB. » [Ibid. L'italique est de moi.]

Donnons à cette suggestion son *impérative* image d'appui. Soit s_I [Fig. 29] un quelconque trajet incliné de la bille qui glisse, et *s* le trajet vertical de cette même bille qui tombe.

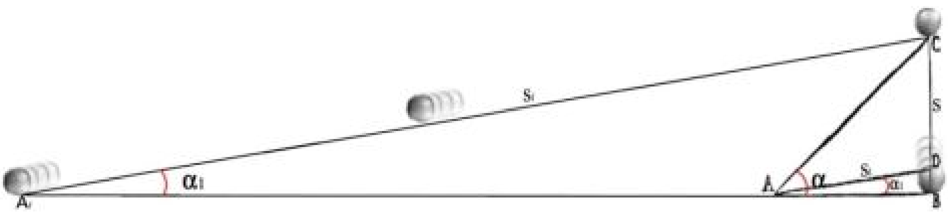

Figure 29

Un irréductible décalage cognitif oppose l'aspect perceptif d'une évidence mécanique à son essence purement projective.
Il nous est beaucoup plus facile de *percevoir* la lenteur de la bille sur la pente CA$_1$ que sur la pente DA,
bien qu'il s'agisse – projectivement – de la *même* pente S$_1$

Dans l'image ci-dessous j'ai transposé en dehors du triangle ABC le trajet incliné DA – qui, dans le texte, représente l'une quelconque des descentes comprises entre 0° et 90° exclus – qui devient ainsi CA$_I$. On voit bien que la *taille externe* de s_I (la descente inclinée) et *s* (le précipice vertical) n'a ici aucune importance, car les deux triangles ADB et A$_I$CB représentent une même proportionnalité de rapports *internes* – trigonométriques – entre la base (cosα) et le côté vertical (sinα). Et toutefois, malgré sa parfaite équivalence avec l'image en Fig. 28.III, l'image en Fig. 29 est pour notre *perception* beaucoup mieux adaptée pour engendrer l'étonnement visé par Salviati. Nous *percevons* en effet immédiatement – comme le petit confronté aux verres couchés/dressés en ⟨85⟩ que la *rapidité* du mouvement de la sphère diminue radicalement par rapport à celle de sa chute verticale le long de s. Confronté à cette troisième incontournable évidence, Sagredo s'arrête, dans l'étonnement :

> ⟨92⟩ « SAGREDO - J'allais vous dire "oui" sans hésiter, car le mouvement par la verticale CB me paraît forcément plus rapide que le long du plan incliné CA. Mais alors, comment la bille qui tombe le long du plan incliné pourrait-elle, une fois arrivée au point A, avoir autant d'élan, c'est-à-dire exactement le même degré de vitesse que possède au point B la bille tombant par la verticale ? *Ces deux propositions me semblent contradictoires*. » [Ibid.]

« Ces deux proposition me semblent contradictoires » : voilà Sagredo qui se met à côté du petit Edi (stade 2 : ⟨66⟩) qui « rajoute, enlève à nouveau, etc., sans parvenir à se satisfaire. ». *Trois* pages de *Dialogue* [114-117] vont encore suivre pour que Sagredo – et avec lui Simplicio – puissent accepter de passer outre, car leur esprit n'arrête pas d'osciller entre le plan incliné « couché » (le grand en Fig. 29) qui *impose* d'une part la lenteur « absolue » de la sphère sur s_I ainsi que la rapidité « absolue » de sa chute le long du précipice « dressé » *s*, et d'autre part les évidences en Fig. 28.I, qui au contraire imposent, avec la même impérativité, une égalisation dynamique entre tous les inclinaisons concevables. Sagredo devra donc réaliser ici la même opération mentale que nous lui avons fait accomplir à la suite de ses déclarations en ⟨39⟩ (« encore maintenant cela me paraît impossible… »). Dans ce cas, il s'agissait de distinguer, au sein d'une même intuition « globale » et donc « syncrétique » du mouvement du pendule, entre la *vitesse* et la *fréquence*, tandis que dans le cas du Plan Incliné il s'agit de distinguer – toujours à l'intérieur du mouvement d'un corps – entre la vitesse/rapidité et la vitesse/élan. Une fois réalisée cette distinction, Sagredo sera capable de *multiplier* ces deux dimensions, et il aura de la sorte *égalisé* le phénomène : un processus que je prendrai en charge dans la partie qui suit, en [§10.1, §10.2]. [...]

(4) LE PENDULE POTENTIEL AU CŒUR DE TOUT MOUVEMENT ACTUEL – Revenons maintenant à notre plan incliné.

En synthèse, ce qui permet de voir *dans* le côté vertical CB du plan incliné le vecteur $\overrightarrow{CB}$ d'une augmentation de vitesse aussi continue que l'est sa présence purement euclidienne, est l'intrinsèque puissance « kinémétrique » du pendule, qui se place ainsi à côté des outils *géométriques* et « arithmo-métriques » qui organisent la nouvelle physique expérimentale. Pour cette raison, l'acquisition de cette « kinémétrie » est considérée par Galilée comme son vrai joyau :

> ⟨222⟩ « Avant tout, il faut considérer que le mouvement des corps lourds n'est pas uniforme : partant du repos, ils accélèrent continuellement ; c'est en effet ce que tout le monde connaît et a observé. Mais cette connaissance générale ne sert à rien si on ne sait pas selon quelle proportion se fait cet accroissement de vitesse : cette conclusion, restée jusqu'à notre époque inconnue de tous les philosophes, a été trouvée et démontrée pour la première fois par notre ami commun, l'Académicien. » [Ibid. : 360]

Analysons la forme interne – la *formula* – de cette trouvaille merveilleuse :

> ⟨223⟩ « Dans certains de ses écrits encore inédits qu'il m'a fait la confiance de me montrer, à moi et à certains autres de ses amis, il démontre que l'accélération du mouvement rectiligne des corps lourds se fait selon les nombres impairs *ab unitate*, autrement dit, si on définit des temps égaux quelconques, aussi nombreux qu'on veut, et si on suppose que, dans le premier temps, le mobile, partant du repos, a parcouru tel espace, par exemple une aune, pendant le second temps, il en parcourra trois, cinq pendant le troisième, sept pendant le quatrième, et ainsi de suite, selon la suite des nombres impairs. Cela revient à dire que les espaces parcourus par le mobile à partir du repos ont entre eux la proportion doublée de celle des temps mis à les parcourir ; ou encore, je dirai que les espaces parcourus sont entre eux comme les carrés des temps. SAGREDO - Quelle chose merveilleuse ! Et vous dites qu'il en existe une démonstration mathématique ? SALVIATI - Démonstration mathématique très pure. » [Ibid.]

Pour démontrer cette affirmation, Galilée oblige son plan incliné à se refléter dans le *miroir inversé*… d'un autre plan incliné [Fig. 73′], en le transformant de la sorte en ce pendule potentiel que nous venons juste de fonder *in re* en sa « réelle possibilité » :

> ⟨224⟩ « [1] SALVIATI : Je vous ai présenté l'observation de ce pendule, pour que vous compreniez que l'élan acquis sur l'arc descendant, où le mouvement est naturel, a par lui-même la puissance de pousser d'un mouvement violent la même boule sur un espace égal de l'arc ascendant ; *il a cette puissance par lui-même*, dis-je, quand tous les empêchements externes sont supprimés. [2] On comprendra aussi, et sans le moindre doute, que, tout comme sur l'arc descendant la vitesse croît jusqu'au point le plus bas de la verticale, de même, à partir de là, elle diminue sur l'arc ascendant, jusqu'au point le plus haut, et diminue dans les mêmes proportions qu'elle a d'abord augmenté : ainsi les degrés de vitesse en des points également distants du point le plus bas sont égaux entre eux. [3] Si on raisonne de façon cohérente, cela nous amènerait à penser, me semble-t-il, que, si le globe terrestre était perforé par le centre, un boulet d'artillerie descendant dans ce puits acquerrait jusqu'au centre un élan de vitesse qui, au-delà du centre, le pousserait vers le haut sur un espace égal à celui de sa chute, [4] la vitesse diminuant toujours après le centre avec des décréments semblables aux incréments acquis dans la descente ; le temps passé à ce second mouvement, ascendant, serait égal, je crois, à celui de la descente. Or, en perdant peu à peu, jusqu'à extinction complète, le degré maximum de vitesse qu'il possédait au centre, le mobile parcourt en un temps égal une distance égale à celle qu'il avait parcourue lorsqu'il faisait une acquisition de vitesse depuis la privation totale jusqu'à ce degré maximum. [5] Il me paraît donc fort raisonnable [*par ben ragionevole*] que, s'il continuait avec ce degré maximum de vitesse, en autant de temps il parcourrait ces deux espaces à la fois. [6] Supposons qu'on divise en esprit ces vitesses en deux parties, les degrés croissants et les degrés décroissants, par exemple ces nombres dont les premiers, ceux du temps de la descente, vont croissant jusqu'à 10 et les autres, ceux du temps de la montée, décroissant jusqu'à 1 ; on voit qu'ajoutés les uns aux autres, ils font autant que si une seule des deux parties était entièrement constituée de degrés égaux au plus grand. La totalité de l'espace parcouru avec tous les degrés de vitesse, croissants et décroissants (autrement dit le diamètre entier), doit donc être égale à l'espace parcouru par les vitesses les plus grandes, quand le nombre de ces vitesses fait la moitié de l'agrégat des vitesses croissantes et décroissantes.
>
> J'ai expliqué les choses d'une manière fort difficile, je le reconnais ; Dieu veuille que je me sois fait comprendre ! » [Galilée 1632 : 367-368. L'italique et les crochets sont de moi.]

Pourquoi en [5] Salviati dit « fort raisonnable » ? Nous le savons déjà : car ces « deux espaces à la fois » ne *postulent* cet isomorphisme parfait entre nombres et mouvements, qu'au nom du bon sens et de la « raison suffisante », c'est-à-dire de la cohérence narrative du monde qui nous entoure et nous habite. De sa part, le bon Dieu a manifestement écouté le souhait de maître Salviati, car Sagredo se produit soudainement en une performance vraiment étincelante :

> ⟨225⟩ « SAGREDO : [1] Je crois avoir très bien compris. Supposons que le mouvement commence en partant du repos et que sa vitesse croisse successivement par des ajouts égaux, comme cela se passe avec la suite des nombres à partir de l'unité, et même du zéro qui représente l'état de repos.

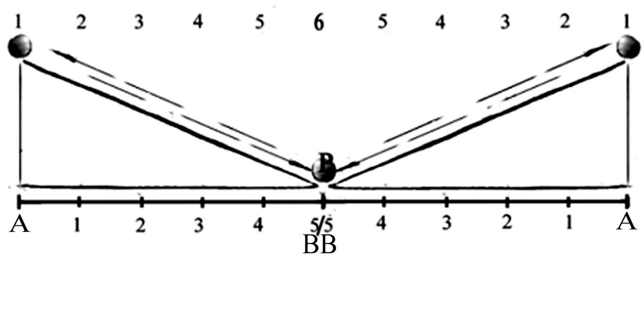

Figure 73 [De moi] Le plan incliné « au miroir ».

> [2] Disposons-les ainsi, en en plaçant à la suite l'un de l'autre autant que nous voulons, le degré le plus petit étant zéro et le plus grand 5 par exemple, tous ces degrés de vitesse avec lesquels le mobile s'est mû font une somme de 15 ; or, si le mobile se mouvait avec un même nombre de degrés, mais chacun égal au degré maximum, soit 5, l'agrégat de toutes ces vitesses serait le double de l'autre, soit 30 ; si donc le mobile se mouvait aussi longtemps, mais avec une vitesse uniforme égale à celle du degré maximum, 5, il devrait parcourir un espace double de celui qu'il parcourut dans le temps de l'accélération qui commença en partant du repos. » [Ibid. : 367-368]

Nous reprendrons les propos de Salviati en [§11.3(6)], lorsqu'il s'agira de Sagredo en personne, et d'entendre la puissance dont ses sens apparaissent *« par eux-mêmes »* manifestement doués, étant donné ce que son esprit (sa « *velocissima e sottilissima apprensiva* ») arrive à faire des mots, sans aucun doute « forts difficiles », de son maître.

Pour le moment concentrons-nous sur la loi arithmétique dont il est question en ⟨225 [2] ⟩. Cette loi dit qu'étant donné un nombre n quelconque :

$$2(\overbrace{0+1+2+3+\ldots+n}^{m\ \textit{éléments}}) = \overbrace{n+n+n+\ldots+n}^{m\ \textit{éléments}}.$$

On voit bien ici que Sagredo cerne dans la progression du mouvement une loi « cantorienne » d'auto-dénombrement *du* nombre, car tout nombre/vitesse correspondant à un « instant » sur l'hypoténuse du plan incliné, s'auto-mesure à partir de zéro. Il faut bien retenir ce point, car nous verrons [§11.2 (3_{II})] que toute la mathématique de l'infini dédouanée par Bolzano et ses contemporains a pénétré justement ce domaine de l'être-en-puissance – la *Mächtigkeit* de Cantor – en répétant la même erreur métaphysique qui attribue à tout mouvement réel et mesurable le statut ontologique (et donc les propriétés physico/mathématiques) d'un mouvement actuel. Pour revenir à la ⟨225⟩, cette loi purement arithmétique, interne à la progression du *nombre*, devient une loi interne à la progression du *mouvement* « physique » dès que nous postulons 1) (PSE) que les histoires physiques ont *un sens* ; 2) que la conservation d'un même « élan » (puissance, « inclinaison », intention de bouger) au cours d'un même mouvement coïncide avec la présence d'un pendule *potentiel* à l'intérieur du corps qui chute. Ce n'est que parce qu'il se soumet à cette double condition, que le mouvement à la fois actuel (cinématique) et potentiel (dynamique) de notre sphère roulante peut se produire selon une succession de vitesses parfaitement isomorphe (tant du point de vue ordinal que cardinal) à la suite de nombres « 0 1 2 3 4 5 4 3 2 1 0 ».